19/5/17

Στατιστική Συμπερασματολογία

25/5/17 όχι μάθημα
Τελευταίο 1/6/17

Έλεγχοι Στατιστικών Υποθέσεων - Στατιστικά Τεστ

Στοιχεία Στατιστικού Τεστ

I) Στατιστικές Υποθέσεις

Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$

$H_0: \theta = \theta_0$ (θ_0 γνωστό) $\quad H_a: \theta = \theta_a$ (θ_a γνωστό)

$H_0: \theta > \theta_0 \quad H_a: \theta \gtrless \theta_a$

ή

$H_0: \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta \quad H_a: \theta \in \Theta_a \subseteq \Theta$ } σύνθετες υποθέσεις (δεν προσδιορίζουν την κατανομή του πληθυσμού)

II) Στατιστική Συνάρτηση Τεστ (σ.σ.τ)

$T = T(x_1, \dots, x_n, \theta)$

III) Κρίσιμη Περιοχή (Κ.Π) δηλ. ένα υποσύνολο των συνόλου τιμών της σ.σ.τ. T ή $C = \{ \underline{x} : T(\underline{x}, \theta) \in A \subseteq \mathbb{R} \}$

IV) Λήψη Απόφασης

Αν η τιμή της σ.σ.τ περιλαμβάνεται στη (Κ.Π) τότε Απορρίπτεται η H_0 αλλιώς δεν μπορεί να απορριφθεί η H_0

V) Σφάλματα Τύπου I και II

		Στατιστικός	
		Απορ. H_0	Αποδ. H_0
Φύση	H_0 αληθής	Σφάλμα τύπου I	O
	H_0 δεν είναι αληθής ή H_a αληθής	O	Σφάλμα τύπου II

Σφάλμα τύπου I: Απορ. H_0 ενώ H_0 αληθής

Σφάλμα τύπου II: Απορ. H_a ενώ H_a αληθής (Αποδ. H_0)

Η απόφαση θα είναι αξιόπιστη αν τα Σφάλματα τύπου I, και II είναι μικρά.
ή οι πιθανότητες των σφαλμάτων τύπου I και II είναι μικρές.

$a = P(\text{Σφάλμα τύπου I}) = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής})$

$\beta = P(\text{Σφάλμα τύπου II}) = P(\text{Αποδ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής})$

Θεωρία Neyman-Pearson

όπου a: επίπεδο σημαντικότητας του τεστ

Τα a, β δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα

Η ιδέα είναι να κρατηθεί το a μικρό (στην πράξη $a = 0.01$ ή 0.05 ή 0.1) και να κατασκευαστεί στατιστικό τεστ με σ.σ.τ και ΚΠ που ελαχιστοποιεί το β ή μεγιστοποιεί το $\gamma = 1 - \beta$ ← Ισχύς τεστ

Ισχυρότατο Τεστ (Ι-τεστ)

Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης μηδενικής H_o έναντι μιας απλής H_a

Ισχυρότατο τεστ επιπέδου σημαντικότητας α $(0<a<1)$ για τον έλεγχο αυτό ονομάζεται το τεστ με την μέγιστη ισχύ γ μεταξύ όλων των άλλων τεστ ίδιου επιπέδου σημαντικότητας

Ομοιόμορφα Ισχυρότατο τεστ (ΟΙ-τεστ)

Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης H_o έναντι μιας σύνθετης H_a. Θεωρούμε ένα τεστ για τον έλεγχο αυτό και έστω $\gamma(\theta)$ η ισχύς του ως συνάρτηση της θ, όπως αυτό καθορίζεται από την H_a. Το τεστ αυτό ονομάζεται ομοιόμορφα ισχυρότατο αν η ισχύς $\gamma(\theta)$ είναι για κάθε θ μεγαλύτερη ή ίση από την ισχύ οποιουδήποτε άλλου τεστ ίδιου επιπέδου σημαντικότητας

Θεμελιώδες Λήμμα Neyman-Pearson για τη κατασκευή Ι-τεστ

Έστω τ.δ. $x_1,\dots,x_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$. Έστω πρόβλημα ελέγχου μιας απλής μηδενικής $H_o:\theta=\theta_o$ (θ_o γνωστό) έναντι μιας απλής εναλλακτικής $H_a:\theta=\theta_a$ (θ_a γνωστό) με $\theta_o,\theta_a\in\Theta$. Αν υπάρχει μια κ.π. G με μέγεθος α (επίπεδο σημαντικότητας) και ένας σταθερός αριθμός $k\geq 0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{L_o}{L_a}=\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_o)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_a)}\leq k,\quad \forall \underset{\sim}{x}\in G$$

και $\frac{L_o}{L_a}>k$, $\forall \underset{\sim}{x}\notin G$

τότε η G είναι η πλέον ισχυρή κ.π. με μέγεθος α για τον έλεγχο της H_o έναντι H_a

Παρατήρηση

ⓐ Η κ.π. επιπέδου σημαντικότητας α διαμορφώνεται για μικρές τιμές του λόγου $\frac{L_o}{L_a}$, δηλ. $\frac{L_o}{L_a}\leq k$.

(8) Γιατί η ~~[illegible]~~ Ι-κ.π βασίζεται σε μικρές τιμές του $\frac{L_0}{L_a}$;

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_a)} \simeq \frac{P_{\theta_0}(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_1+\varepsilon_1, \dots, x_n-\varepsilon_n \le X_n \le x_n+\varepsilon_n)}{P_{\theta_a}(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_1+\varepsilon_1, \dots, x_n-\varepsilon_n \le X_n \le x_n+\varepsilon_n)}$$

$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_0) \longleftarrow$ πιθανοφ. από H_0

$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_a) \longleftarrow$ πιθανοφ. από H_a

Ο λόγος $\frac{L_0}{L_a}$ παίρνει μικρή τιμή σημαίνει ότι $L_0 << L_a$

— ıı — ότι $P_{\theta_0}(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_n-\varepsilon_1, \dots) << P_{\theta_a}$

— ıı — Η πιθανότητα πραγματοποίησης της παρατηρηθείσας τιμής $x_1,\dots,x_n$ του δείγματος από την H_0.

Εφαρμογή Λήμματος Neyman-Pearson για την κατασκευή Ζ-τεστ

Έστω τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $x_1,\dots,x_n$ από πληθυσμό με $N(\mu,\sigma^2)$ σ^2 γνωστό. Να κατασκευασθεί Ι-τεστ επιπέδου σημαντικότητας $a\ (0<a<1)$ για έλεγχο

$H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ (μ_a γνωστό) $\mu_a>\mu_0$

Θα προσπαθήσαμε να δημιουργήσαμε την κ.π. για μικρές τιμές $\frac{L_0}{L_a}$, έστω $\frac{L_0}{L_a}\le k$.

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

$$\text{κ.π}: \frac{L_0}{L_a}\le k \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu_a)} \le k$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_a)^2}} \le k$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum(x_i-\mu_0)^2-\sum(x_i-\mu_a)^2\right]} \le k$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum(x_i-\mu_0)^2-\sum(x_i-\mu_a)^2\right] \le \log k$$

$$\Rightarrow \sum(x_i-\mu_0)^2-\sum(x_i-\mu_a)^2 \geq -2\sigma^2\log k$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2-2\mu_0\sum x_i+n\mu_0^2-\sum x_i^2+2\mu_a\sum x_i-n\mu_a^2 \geq -2\sigma^2\log k$$

$$\Rightarrow 2(\mu_a-\mu_0)\sum x_i \geq -2\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_a^2$$

$$\xRightarrow{\mu_a>\mu_0} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{-2\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_a^2}{2(\mu_a-\mu_0)} = k'$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k' \Rightarrow \bar{x} \geq \frac{k'}{n} = k''$$

Άρα η Ι-κρίσιμη περιοχή είναι

$$\bar{x} \geq k''$$

Νέο πρόβλημα: Πως θα βρω το κρίσιμο σημείο (κ.σ) k'';

Απάντηση: ΠΑΝΤΑ αξιοποιείται το μέγεθος του τεστ

$$a = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ})$$

$$a = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ})$$
$$= P(\bar{x} \geq k'' \mid x_1,\ldots,x_n \sim N(\mu_0,\sigma^2))$$
$$= P(\bar{x} \geq k'' \mid \bar{x} \sim N(\mu_0, \tfrac{\sigma^2}{n}))$$
$$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k''-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$
$$= P\left(Z \geq \frac{k''-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right),\ Z \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ ορισμός εκατοστιαίων σημείων $N(0,1)$

$$\Rightarrow \frac{k''-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_a \Rightarrow \boxed{k'' = \mu_0 + z_a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Συγκεντρωτικά

Για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu=\mu_a, \mu_a>\mu_0$

η σ.σ.Τ είναι

$\bar{X}$ με κατανομή $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ υπό H_0

με κρίσιμη περιοχή μεγέθους α

$$\bar{X} \geq \mu_0 + Z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ή Ισοδύναμα

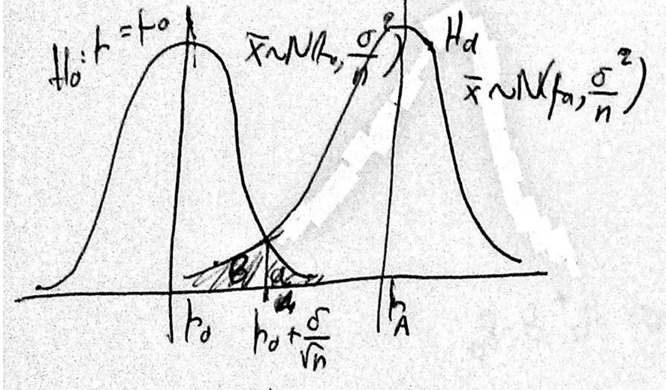
η σ.σ.Τ είναι η $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό H_0

και κ.π. μεγέθους α, $Z \geq Z_a$

Παρατηρήσεις

ⓐ Το τεστ λέγεται Z-τεστ

ⓑ Τα σφάλματα τύπου I και II και οι πιθανότητες α, β δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα



$$a = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ})$$

$$\beta = P(\text{Αποδ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ})$$

Υπολογισμός Ισχύος Z-τεστ

$$\gamma \overset{\text{op}}{=} 1-\beta = 1 - P(\text{Αποδ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθ})$$

$$= P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθ})$$

$$= P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + Z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1, \dots, x_n \sim N(\mu_a, \sigma^2) \\ \bar{x} \sim N(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}) \end{matrix}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 + Z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \frac{\bar{x}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\right)$$

$$= P\left(Z \geq Z_a + \frac{\mu_0-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z \leq Z_a + \frac{\mu_0-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(Z_a + \frac{\mu_0-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\boxed{\gamma = 1 - \Phi\left(Z_a + \frac{\mu_0-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}$$

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό με $N(\mu,\sigma^2)$
σ^2 γνωστό. Να κατασκευαστεί Ι-τεστ επιπέδου σημαντικότητας α $(0<\alpha<1)$ για έλεγχο
$H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \mu=\mu_a$ (μ_a γνωστό), $\mu_a<\mu_0$

ΟΙ-τεστ για έλεγχο απλής H_0 έναντι σύνθετης H_a

Μεθοδολογία

Έστω τ.δ. $x_1,\dots,x_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$
Έστω προς έλεγχο
$H_0: \theta=\theta_0$ (θ_0 γνωστό) έναντι H_a
$\theta>\theta_0$
$\theta<\theta_0$
$\theta\neq\theta_0$

Για τον έλεγχο κατασκευάζουμε το Ι-τεστ για έλεγχο απλής προς απλή
H_0 $\theta=\theta_0$ έναντι $H_a^*: \theta=\theta_a$ (θ_a γνωστό)
με θ_a να ικανοποιεί την αρχική εναλλακτική H_a δηλ.
$\begin{cases}\theta_a>\theta_0\\ \theta_a<\theta_0\\ \theta_a\neq\theta_0\end{cases}$

Αν το Ι-τεστ για τον έλεγχο της $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι $H_a^*: \theta=\theta_a$
δεν εξαρτάται από το θ_a
τότε αυτό είναι και το ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_a

Παράδειγμα Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 γνωστό
Να κατασκευαστεί το ΟΙ-τεστ μεγέθους α για τον έλεγχο
$H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \mu>\mu_0$

Θεωρούμε τον έλεγχο απλής προς απλή
$H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι $H_a^*: \mu=\mu_a$ ($\mu_a>\mu_0$)
Για τον έλεγχο αυτό όπως κατασκευάσαμε το Ζ-τεστ που έχει: σ.σ.τ. την
$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό H_0
και κ.π. $Z\geq Z_\alpha$

Επειδή το τεστ αυτό είναι
ανεξάρτητο του μ_a της H_a^*, τότε είναι και το ΟΙ-τεστ
για έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a: \mu > \mu_0$

Άσκηση: Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με Εκθ(λ), $\lambda > 0$
$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0)$

Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο
$H_0: \lambda = \lambda_0$ (λ_0 γνωστό) έναντι $H_a: \lambda > \lambda_0$.